

# 實驗四 基曼效應

## 一、目的

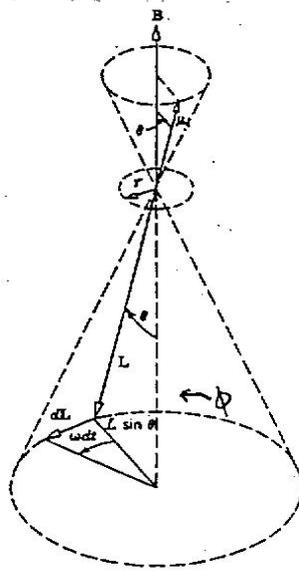
藉由觀測鎘 (cadmium;  $^{48}\text{Cd}$ ) 的 normal Zeeman effect 的結果，求  $\frac{e}{m}$  之值

## 二、原理

(基曼效應之理論部份可直接由量子力學推導，在此我們係利用古典圖像，代入量子數來推得)

### 1. Larmor 進動

若一磁矩  $\vec{\mu}$  置於一外加磁場  $\vec{B}$  中，則由電磁理論可知，此外加磁場給予磁矩一力矩  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ ，並使其具能量  $\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ 。若此磁矩於此磁場中，因為原子中之磁矩是由電子之角動量  $\vec{L}$  所生，此磁矩與其角動量必須繞磁場進動，並一直維持兩者間角度不變及兩者大小不變，如圖一所示：



圖一

我們以下法算出進動角頻率 $\omega$

由圖一中可看出

$$\tau = B\mu \sin \theta \quad (1)$$

$$dL = L \sin \theta \omega dt \quad (2)$$

而由  $\tau = \frac{d\vec{L}}{dt}$  可得

$$\tau = L \sin \theta \omega \quad (3)$$

將(1)(3)聯立可求得

$$\omega = \frac{\mu B}{L}$$

亦即

$$\vec{\omega} = \frac{\mu}{L} \vec{B}$$

故知此帶有角動量之磁距在一外加磁場之下無能量改變時會有進動現象，其角進動角頻率正比於外加磁場，且和其夾角 $\theta$ 無關，此稱為**Larmor進動**。應當注意的是上式的推導並沒有用到 $\vec{\mu}$ 和 $\vec{L}$ 的關係式，故其不一定要相互平行。

## 2. Zeeman Effect

由於原子內之某電子之繞核角動量 $\vec{L}$ 與其自旋 $\vec{S}$ 各自和其所對應之磁距有如下之關係：

$$\vec{\mu}_L = -\frac{g_L \mu_b}{\hbar} \vec{L}, \text{ 其中 } g_L = 1$$

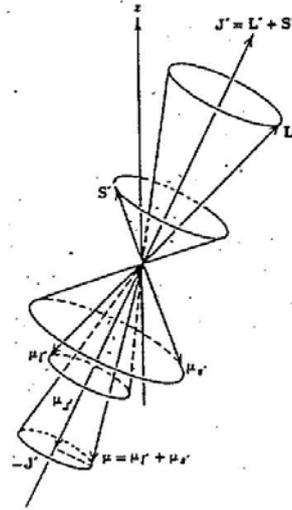
$$\vec{\mu}_S = -\frac{g_S \mu_b}{\hbar} \vec{S}, \text{ 而 } g_S = 2$$

上式中的 $\mu_b = eh / 2m_e$  稱為波爾磁距(Bohr magneton)，對於一多電子原子的所有價電子而言，吾人可以向量相加來得其總磁距

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= -\frac{g_L\mu_b}{\hbar}\bar{L}_1 - \frac{g_L\mu_b}{\hbar}\bar{L}_2 - \frac{g_S\mu_b}{\hbar}\bar{S}_1 - \frac{g_S\mu_b}{\hbar}\bar{S}_2 - \dots \\ &= -\frac{\mu_b}{\hbar}\left[(\bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots) + 2(\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots)\right] \\ &= -\frac{\mu_b}{\hbar}[\bar{L}' + 2\bar{S}']\end{aligned}$$

上式中  $\bar{L}' = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \dots$ ， $\bar{S}' = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots$ 。

又  $\bar{J}' = \bar{L}' + \bar{S}'$ ，可得  $\bar{\mu}, \bar{L}', \bar{S}', \bar{J}'$  的關係圖如圖二。



圖二

若此時外加一磁場，其磁感應  $\vec{B}$  的大小小於原子內部磁感應大小，由原理1得知，進動角頻率  $\vec{\omega}$  正比於  $\vec{B}$ ，可得  $\vec{\mu}$  對  $\vec{J}'$  的進動速率大於對  $\vec{B}$  進動速率，故我們首先求出  $\vec{\mu}$  於  $\vec{J}'$  上的分量，再求其於  $\vec{B}$  上的分量。

$$\begin{aligned}\mu_{J'} &= \mu \frac{\bar{\mu} \cdot \bar{J}'}{\mu J'} = \frac{\mu_b}{\hbar} \frac{(\bar{L}' + 2\bar{S}') \cdot (\bar{L}' + \bar{S}')}{J'} \\ &= -\frac{\mu_b}{\hbar} \frac{(\bar{L}' + 2\bar{S}') \cdot (\bar{L}' + \bar{S}')}{J'^2} J'_z \\ &= -\frac{\mu_b}{\hbar} \frac{(3J'^2 + S'^2 - L'^2)}{2J'^2} J'_z\end{aligned}$$

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_B B = \frac{\mu_B B}{\hbar} \frac{(3J'^2 + S'^2 - L'^2)}{2J'^2} J'_z$$

將  $J'^2 = j'(j'+1)\hbar^2$  ,  $S'^2 = S'(S'+1)\hbar^2$  , 及  $L'^2 = l'(l'+1)\hbar^2$

代入得

$$\Delta E = \mu_B B g m'_j \quad \text{---(A)}$$

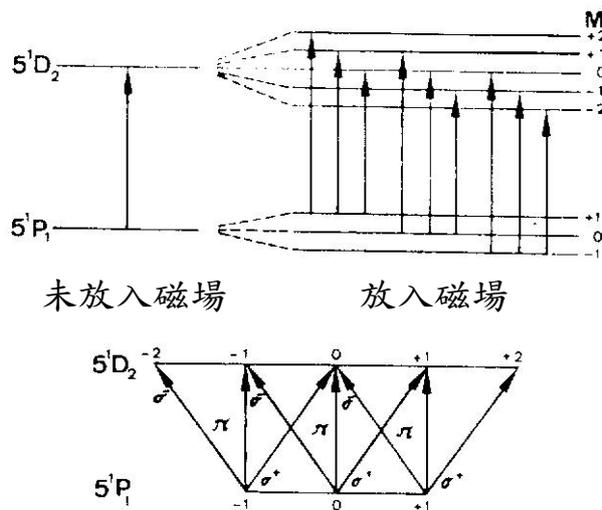
其中  $g = 1 + \frac{j'(j'+1) + s'(s'+1) - l'(l'+1)}{2j'(j'+1)}$  ,

稱為 Land'e g factor

① normal Zeeman effect : 當  $\vec{S}' = 0$  ,  $\vec{J}' = \vec{L}'$

② anomalous Zeeman effect : 當  $\vec{S}' \neq 0$  ,  $\vec{J}' = \vec{L}' + \vec{S}'$

3. 本實驗使用鎘燈  $^{48}\text{Cd}$  ( $\vec{S}' = 0$ ), 其部份能階及其相互之間的躍遷如圖三



圖三

其能階差可由式(A)算出。其輻射遵守選擇定則  $\Delta m'_j = 0, \pm 1$ ， $\Delta l' = \pm 1$ ，可得9條輻射線，但分別各有三條輻射線具有相同能量，故只能從光譜分析儀中得到三條光譜線，而所相鄰光譜線的能量差為

$$\Delta E = \frac{e}{2m} B \hbar = h \Delta \nu$$

由光譜分析儀原理，以及  $\Delta \lambda$  和  $\Delta \nu$  的關係，可得  $\Delta E$  值，並由已知  $B$  值，求  $\frac{e}{m}$  值。

因光速  $c$  為定值，

$$dc = \frac{\partial c}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial c}{\partial \nu} d\nu = \nu d\lambda + \lambda d\nu = 0$$

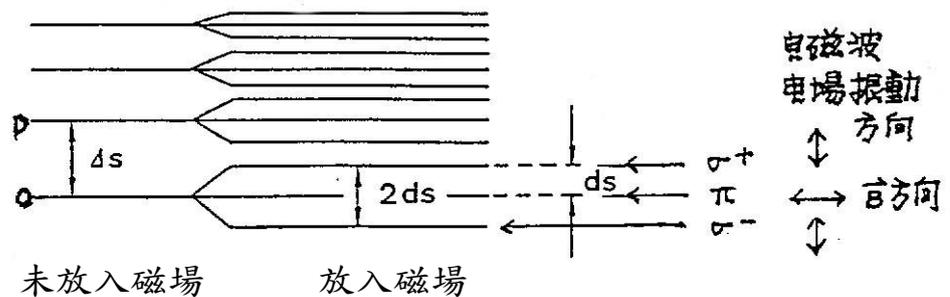
得  $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$ ，故有

$$\Delta \nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda \text{ -----②}$$

而由光譜分析儀原理  $\Delta \lambda = \frac{dS}{\Delta S} \times \frac{\lambda^2 \sqrt{n^2 - 1}}{2d(n^2 - 1)}$ ，其中  $dS$  和  $\Delta S$  示於

圖四，而  $n$  為分光作用之 Lummer-Gehrcke Plate (LGP) 的折射率，此處  $d = 4.04\text{mm}$ ， $n = 1.4567$

( $d$  為 LGP 的厚度)



圖四：於目鏡所見光譜線，上密下疏

將 $\Delta\lambda$ 代入式①及式②，得

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi}{B} \cdot c \cdot \frac{dS}{\Delta S} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2d(n^2 - 1)} \text{-----} \textcircled{3}$$

#### 4. Paschen-Bach effect :

若此時外加磁感應 $B$ 的大小，大於原子內部磁感應的大小，則 $\vec{S}'$ 和 $\vec{L}'$ 的耦合會被破壞。

由 $\vec{\mu} = -\frac{\mu_b}{h} [\vec{L}' + 2\vec{S}']$ 與 $\Delta m'_s = 0$ ， $\Delta m'_l = 0, \pm 1$ ，可得

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_b &= -\frac{\mu_b}{h} [L'_z + 2S'_z] \\ \Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} &= -\mu_b B = \frac{\mu_b B}{h} (L'_z + 2S'_z) = \mu_b B (m'_l + 2m'_s) \end{aligned}$$

本實驗因 $\vec{S}' = 0$ ，故所得光譜現不會因磁感應強度大於內部磁感應強度而有所差別。

### 三、 實驗儀器

#### A. 新基曼效應儀器

磁感應探測棒及測磁計 (Gauss) (110V)

鎢燈及鎢燈加熱器 (110 V)

電壓電源供應器 (110 V)

基曼效應光學組(光台座、150 mm 透鏡、紅光濾光片、有刻度目鏡、偏光鏡、1/4 波板、Fabry-Perot 片、電磁鐵)

#### 四、 注意事項

1. 探測棒很貴需小心拿取，勿折損，校準完畢後馬上套上套子，之後放在磁鐵物質中間測磁場時，不用拿下套子即可直接測量。
2. 探測棒的扁平面須與待測磁場方向垂直。若測磁計的指針向負方向轉動時，只須將探測棒的扁平面反轉即可。
3. 鎢燈每打開 15 分鐘即須關掉，待冷卻後再開。 切記！

## 六、 實驗結果

1. 由步驟 2 結果，得  $B-I_B$  圖 ( $I_B$  為橫軸) 及數據表。
2. 利用  $B-I_B$  圖的延伸，可推出 20 A 所對應的磁場大小。
3. 由步驟 5 的結果，列出  $dS$  及  $\Delta S$  的值，並求  $\frac{dS}{\Delta S}$ 。
4. 由公式③求  $\frac{e}{m}$  之值。 $\frac{e}{m}$  的理論值為  $1.76 \times 10^{11} M^2 / VS^2$

將實驗值與理論值比較，求誤差百分比。

$$\left( \text{註：} \left( \frac{e}{m} \right)_{\text{theory}} = 1.76 \times 10^{11} \frac{m^2}{VS^2} = 1.76 \times 10^{11} \frac{As}{Kg} \right)$$

5. 磁場與  $dS$  的關係為何？並解釋之。
6. 請利用所拍攝下來的圖像說明它們的不同之處。